بینهایت چقدر بزرگ است؟

از بین همه سوالات بی پایانی که کودکان و ریاضیدانان درباره بینهایت پرسیده اند ، یکی از پرتکرارترینها درباره اندازه آن است.

در پایان فیلم پرمخاطب Avengers : Endgame ، Tony Stark در یک هولوگرام از پیش ضبط شده ، از دختر جوانش با گفتن " 3000 تا دوستت دارم" خداحافظی میکند .

این لحظه یادآورنده ی صحنه ای از پیشتر است که آن دو در هنگام شکرگزاری شبانه ، همراه با شوخی ، اندازه عشقشان به یکدیگر را کمّی سازی میکنند.

طبق صحبت Robert Downey Jr. ، بازیگر نقش Stark ، این دیالوگ ، الهام گرفته شده از صحبتهایش با فرزندان خودش است .

بازی ای که میتواند برای کشف اعداد بزرگ روش جالبی باشد :

" 10 تا دوستت دارم"

" ولی من 100 تا دوستت دارم"

" خب ، من 101 تا دوستت دارم"

این دقیقا دلیل این است که کلمه "googolplex" در خانه من محبوب شده.(10 بتوان عدد googol –که 10 بتوان 100 است–)

اما همگی میدانیم که این بحث نهایتا بکجا میرسد :

" من تو را بینهایت دوست دارم."

" اِ ؟؟ من تو را بینهایت بعلاوه یکی دوست دارم"

چه در بازی باشد و چه در زمان خواب ، کودکان خیلی زودتر از کلاس ریاضی ، با مفهوم بینهایت مواجه میشوند. و بطرز قابل درکی ، شیفتگیشان در این مفهوم رازآلود ، پیچیده و مهم رشد میابد . بعضی ازین کودکان بزرگ میشوند تا ریاضیدانی مجذوب به مفهوم بینهایت شوند ، و بعضی از آن ریاضیدانان ، چیزهای شگفت انگیز و جدیدی درباره بینهایت کشف میکنند.

شاید بدانید که بعضی از مجموعه های عددی دارای اندازه بینهایت هستند ، اما میدانستید بعضی بینهایتها از بقیه بزرگترند ؟ و اینکه ما ازینکه آیا بینهایتی بین دو بینهایتی که سراغ داریم وجود دارد مطمئن نیستیم ؟ ریاضیدانان درباره سوال دوم حداقل به اندازه یک قرن فکر کرده اند. و برخی تحقیقات اخیر ، تفکر مردم به این مساله را تغییر داده است.

برای مواجهه با سوالهای اندازه مجموعه های بینهایت ، با مجموعه هایی که شمردنشان راحت تر است شروع میکنیم. یک مجموعه ، گرداوری از اشیا یا عناصر است و یک مجموعه متناهی ، مجموعه ایست که تعداد محدودی عضو دارد.

تعیین اندازه مجموعه های متناهی ساده است ، فقط تعداد عناصری که شامل میشود را بشمارید. چون مجموعه متناهیست ، میدانید که نهایتا شمردن تمام میشود. و وقتی تمام شود شما اندازه مجموعه تان را میدانید.

این روش در مجموعه های نامتناهی جواب نمیدهد. مجموعه اعداد طبیعی را در نظربگیرید. اندازه این مجموعه چیست؟ از آنجایی که بزرگترین عدد طبیعی وجود ندارد ، تلاش براب شمردن اعضا نتیجه نمیدهد . یک روش این است که بسادگی اندازه مجموعه را بینهایت اعلام کنیم. که غلط نیست اما وقتی بقیه مجموعه های بینهایت را بشناسیم ، درست هم نیست.

مجموعه اعداد حقیقی را در نظر بگیرید. که نمایش همه اعدادیست که بصورت اعشاری قابل بیان هستند . مثل 8.015- , 3.2 , 7 یا با اعشار نامتناهی مثل ..2^(1/2) = 1.41423 از آنجاییکه هر عدد طبیعی ، عدد حقیقی ست ، مجموعه اعداد حقیقی حداقل به اندازه مجموعه اعداد طبیعی بزرگ است ، پس این هم باید یک مجموعه بینهایت باشد.

اما اینکه اندازه مجموعه اعداد حقیقی را با همان بینهایتی که برای مجموعه اعداد طبیعی بیان کردیم ، بیان کنیم ، راضی کننده نمیباشد. برا دیدن دلیلش ، دو عدد دلخواه در نظر بگیرید ، مثلا 3 و 7 . بین آن دو عدد همواره بتعداد متناهی عدد طبیعی وجود خواهد داشت. که 4 و 5 و 6 هستند . ولی بتعداد نامتناهی عدد حقیقی بین آنها وجود دارد مثل π , ..5.666 , 3.01 , 3.001 و..

واقعا جالب است که اهمیتی ندارد دو عدد حقیقی متمایز چه اندازه به هم نزدیکند ،همواره بتعداد بینهایت عدد حقیقی بین آن دو وجود دارد. ولی این بتنهایی چنین معنی ای نمیدهد که اندازه مجموعه اعداد حقیقی با مجموعه اعداد طبیعی متفاوت است. بلکه چنین مفهمومی را پیشنهاد میدهد که تفاوتی بنیادی بین این دو مجموعه بینهایت وجود دارد که به بررسی بیشتری نیاز دارد.

ریاضیدانی بنام George Cantor در اواخر قرن نوزدهم این مفهوم را بررسی کرد. او نشان داد این دومجموعه بینهایت ، واقعا اندازه های متفاوتی دارند. برای فهمیدن و درک کردن چگونه انجام گرفتن این اثبات ، باید ابتدا متوجه شویم چگونه مجموعه های بینهایت را مقایسه کنیم. رمزش مهمترین عنصر هر کلاس ریاضیست : توابع.

راه های بسیار زیادی برای فکر کردن بتوابع وجود دارد ، نمادگذاری تابع مثل f(x)=x^2 + 1 ، نمودارهای سهمیها در صفحه دکارتی ، قواعدی مثل "ورودی را بگیر و 3 تا به آن اضافه کن". اما اینجا به تابع بعنوان راهی که عناصر یک مجموعه را به عناصر مجموعه دیگر نظیر میکند نگاه میکنیم.

یکی ازین توابع را مجموعه اعداد طبیعی ، و دیگری را مجموعه اعداد طبیعی زوج در نظر میگیریم. (علی رغم نقد زیاد ، 0 را جزو اعداد طبیعی فرض میکنیم ، اما در اندازه ها تاثیری ندارد)

N= {0, 1, 2, 3, 4...}

S = {0, 2, 4, 6...}

ضابطه ای ساده برای تبدیل عناصر N به S وجود دارد. f(x) = 2x. این ضابطه بسادگی ورودیهایش را دوبرابر میکند ، پس اگر به N بعنوان ورودی f(x) یعنی همان دامنه اش نگاه کنیم ، خروجیها عناصر S خواهند بود.

f(0)=2 , f(1)=2 , f(2)=4 , f(3)=6 و بهمین ترتیب ...

میتوانیم این موضوع را با زیر هم نوشتن عناصر دو مجموعه ، در کنار هم ، و نظیر کردن آنها با فلش به یگدیگر ، متصور شویم. یعنی ضابطه f، ورویهای N را بخروجیها یعنی S نظیر میکند.

توجه کنید که f(x) چگونه هر عنصر از S را بدقیقا یک عنصر از N نظیر کرده است. این کاریست که توابع میکنند ، اما f(x) اینکار را بنحو بخصوصی انجام میدهد. fابتدا هر عضو در S را بچیزی در N نظیر میکند . با اصطلاحات توابع میگوییم هر عنصر از S تصویری از یک عنصر N تحت تابع f است. برای مثال عدد زوج 3472 در S است ، و ما میتوانیم x را بیابیم بطوریکه f(x)=3472. (x=1736)درین موقعیت میگوییم f(x) نگاشتی از N به S است. روش جالبتر برای گفتن این است که تابع f(x) پوشاست. بهرنحوی بیانش کنیم ، چیزی که مهم است این است : زمانی که تابع f(x) ورودیها از N را بخروجیها در S تبدیل میکند ، هیچ عنصری از S درین روند جا نمیماند.

دومین چیز بخصوص درباره نحوه نظیر کردن خروجیها به ورودیها در f(x) اینست که هیچ دو عنصری در N به عضوی مشابه در S نظیر نمیشوند. اگر دو عدد متفاوت باشند ، دوبرابر شده ی آنها نیز متفاوتست. 5 و 11 دو

عدد طبیعی متمایز در N هستند، خروجی آنها در S نیز متفاوت است : 10 و 22 . درینجا میگوییم تابع f(x) 1-1 است. و توصیف میکنیم که f(x) یک به یک است. نکته اینجاست که هیچ عنصری از S دوبار استفاده نمیشود. هر عنصر از S دقیقا با یک عضو از N جفت میشود.

این دو خاصیت f(x)ترکیبی قدرتمند میسازند . تابع f(x) تناظر کاملی بین اعضای S و اعضای N میسازد. اینکه f(x) پوشاست یعنی هر چیزی در S جفتی در N دارد. و اینکه f(x) یک به یک است ، یعنی هیچ چیزی در S دو جفت در N ندارد. خلاصتاً تابع f(x) ، هر عنصر از N را بدقیقا یک عنصر از S نظیر میکند.

تابعی که هم 1-1 و هم پوشاست ، یک تناظر دوسویه میسازد ، و این تناظر ، یک تناظر دوسویه 1-1 بین اعضای دومجموعه برقرار میکند . این یعنی هر عنصر از یک مجموعه ، دقیقا یک جفت در مجموعه دیگر دارد. و این ، یک راه برای نشان دادن اندازه ی یکسان دو مجموعه بینهایت است.

از آنجایی که f(x) تناظری دوسویه و 1-1 است ، نشان میدهد بینهایتهای S و N با هم برابرند. شاید این موضوع تعجب برانگیز باشد : با همه اینها ، هر عدد زوج یک عدد طبیعیست پس مجموعه اعداد طبیعی ، مجموعه تمام اعداد زوج طبیعی و بیشتر را شامل میشود . این نباید باعث شود N از S بزرگتر باشد؟ اگر با مجموعه های متناهی سروکار داشتیم جواب "بله" بود. اما در مجموعه های نامتناهی میتوان شامل اعضای دیگری بود و همچنان هم اندازه شد. بنحوی ، "بینهایت بعلاوه یک" واقعا مقدار بیشتر از عشق نسبت به " بینهایت "نیست. این تنها یکی از ویژگیهای جالب مجموعه های نامتناهیست.

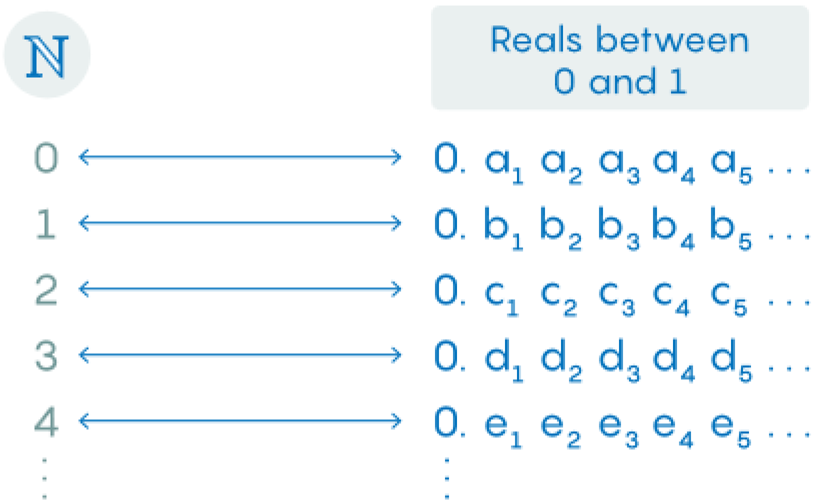
یک مطلب حتی شگفت انگیزتر این است که مجموعه های بینهایت با اندازه های گوناگون وجود دارند. پیشتر ماهیت متفاوت مجموعه های بینهایت اعداد طبیعی و اعداد حقیقی را بررسی کردیم. و کانتور ثابت کرد این دو مجموعه بینهایت ، دارای اندازه های متفاوت هستند . او با diagonal argument معروفش کارهای خارق العاده زیادی انجام داد.

از آنجایی که بینهایت عدد حقیقی بین دو عدد حقیقی متمایز وجود دارد ، الان فقط روی اعداد حقیقی بین 0 و 1 متمرکز میشویم. هر کدام ازین اعداد را میتوان با بسط اعشاری (حتی بطور نامتناهی) نمایش داد. با این شکل :

0 ...a1a2a3a4.

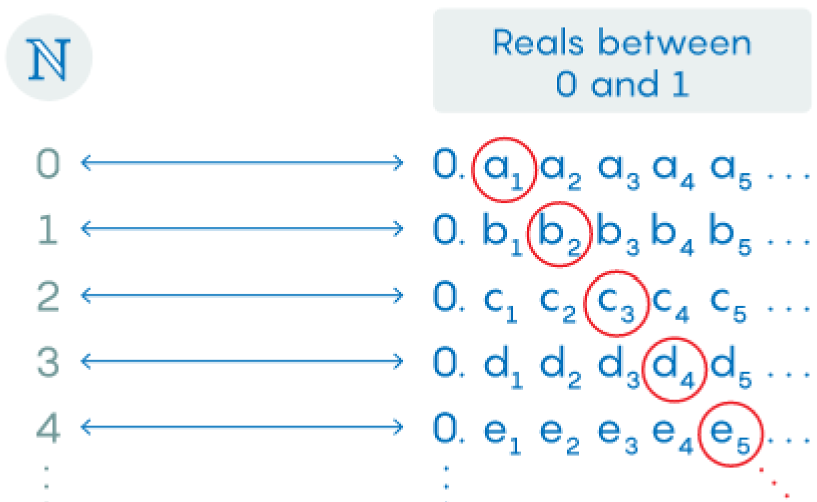
درینجا a1,a2,a3 الی اخر ، اعشار عدد هستند ، این ارقام اعشاری، همه با هم صفر نمیشوند پس خود صفر درین مجموعه وجود ندارد.

Diagonal argument اساسا با یک سوال آغاز میشود: اگر تناظری بین اعداد طبیعی و اعداد حقیقی وجود داشت چه میشد؟ اگر چنین تابعی وجود داشت ، آنگاه این دو مجموعه هم اندازه میشدند. و میتوانستیم از آن تابع برای نظیر کردن هر عدد حقیقی بین 0 و 1 ، به یک عدد طبیعی استفاده کنیم. میتوان لیست مرتب شده تناظر



را اینگونه متصور شد :

هوشمندی diagonal argument این است که میتوان از لیست برای ساختن عدد حقیقی که نمیتواند در لیست باشد استفاده کرد. برای ساختن عدد حقیقی اعشار به اعشار اینگونه عمل میکنیم : اولین رقم اعشاری بعد از ممیز ، چیزی جز a1 ، دومین رقم اعشاری بعد از ممیز ، چیزی جز b2 و سومین رقم اعشاری بعد از ممیز ،



چیزی بجز b3 و بهمین ترتیب .

این عدد حقیقی توسط رابطه اش با قطر لیست تعریف میشود. آیا آن در لیست است ؟ نمیتواند اولین عدد لیست باشد چرا که اولین رقم اعشاری اش متفاوت است. دومین عدد لیست نیز نمیتواند باشد چراکه دومین رقم

اعشاری اش متفاوت است. در حقیقت ، nامین عدد اعشاری نمیتواند باشد چراکه nامین رقم اعشاری اش متفاوت است. و این برای هر n برقرار است پس این عدد جدید که بین 0 و 1 است ، نمیتواند در لیست وجود داشته باشد . ولی قرار بود همه اعداد حقیقی بین 0 و 1 در لیست وجود داشته باشند . این تناقض بدلیل فرض اشتباه وجود تناظر بین اعداد طبیعی و اعداد حقیقی بین 0 و 1 است. پس تناظری نمیتواند وجود داشته باشد. و این نشان میدهد که این مجموعه های بینهایت ، اندازه های متفاوتی دارند . اندکی کار بیشتر با توابع ، میتواند نشان دهد مجموعه اعداد حقیقی ، با مجموعه اعداد حقیقی بین 0 و 1 هم اندازه است. و اعداد حقیقی ، که شامل اعداد طبیعی هم میشوند باید یک مجموعه بینهایتِ بزرگتر باشد.

اصطلاح فنی اندازه یک مجموعه بینهایت ، مفهوم کاردینالیتی آن است . The diagonal argument نشان میدهد کاردینالیتی اعداد حقیقی از کاردینالیتی اعداد طبیعی بزرگتر است. کاردینالیتی اعداد طبیعی که $\aleph_0$ نوشته میشود (خوانده میشود : الف نات) در دیدی استاندارد از ریاضی ، کوچکترین کاردینال بینهایت است. کاردینال بینهایت بعدی $\aleph_1$ (الف یک) است . و سوالی که بسادگی مطرح شده در بیش از یک قرن توسط ریاضیدانان سردرگم کننده مطرح میشود . آیا $\aleph_1$ کاردینالیتی اعداد حقیقیست؟ به بیان دیگر آیا بینهایتهایی بین اعداد طبیعی و اعداد حقیقی وجود دارد ؟ کانتور فکر میکرد جواب نه است. ادعایی که بعنوان continuum hypothesis شناخته میشود. اما او نمیتوانست آنرا اثبات کند. در اوایل 1900 این مساله بحدی مهم مورد توجه قرار گرفت که دیوید هیلبرت وقتی 23 مساله حل نشده اش را جمع آوری کرد ، این مساله ، مساله شماره یک بود.

هزاران سال بعد ، پروسه های طولانی طی شد ، اما پروسه ها به معماهای جدید میرسیدند . در اوایل 1940 Kurt Göde ، منطقدان معروف ،ثابت کرد در صورت وجود قواعد مجموعه ها ، که مشترکا مورد پذیرشند ، اثبات وجود یک بینهایت بین اعداد طبیعی و اعداد حقیقی غیرممکن است. میتواند قدمی بزرگ در جهت درستی continuum hypothesis بنظر بیاید. اما دو قرن بعد ، ریاضیدان Paul Cohen ثابت کرد اینکه بتوانیم ثابت کنیم چنان بینهایتی وجود ندارد غیرممکن است!

معلوم میشود continuum hypothesis به یک روش یا روش دیگر قابل اثبات نیست.

این نتایج با هم برقراری استقلال continuum hypothesis را منتج میشوند. و این نشان میدهد قواعد پذیرفته ی مجموعه ها بتنهایی وجود یا عدم وجود بینهایتی بین اعداد طبیعی و اعداد حقیقی را تعیین نمیکنند. ولی بجای دلسرد کردن ریاضیدانان در پیگیری مفهوم بینهایت ، آنها را به جهات جدید راهنمایی کرده است.

ریاضیدانها هم اکنون بدنبال قواعد اساسی برای مجموعه های بینهایت هستند که هم بتواند توجیهی از آنچه از قبل میدانند باشد و هم جاهای خالی را پر کند.

گفتن اینکه "اندازه عشق من بتو مستقل از بدیهیات است" شاید به اندازه گفتن " بینهایت بعلاوه یکی دوست دارم" جالب نباشد ، اما تصور کنید این جمله بتواند شب بخیر پیش از خوابی برای نسل بعدی ریاضیدانان علاقه مند به بینهایت باشد.

ترجمه: کوثر نخلی

منبع:

https://www.quantamagazine.org/how-big-is-infinity-20220927/